Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті

Физикалық техникалық факультет
Жылуфизикасы және техникалық физика кафедрасы

4 ДӘРІС

Жылуфизикадағы сандық зерттеу әдістеріне кіріспе. Негізгі түсініктер мен әдістер

Дәріскер: А.К. Сариева, п.ғ.к., аға оқытушы

ЖОСПАР

- Есептеу физикасындағы зерттеу әдістері
- Сандық әдістері, негізгі түсініктер
- Дихотомия әдісі (тең бөлу әдісі)
- Кесіндіні тең бөлу әдісі
- Қадамдар санын қалай санауға болады?
- Итерация (қайталау) әдісі
- Ньютон әдісі (жанамалар әдісі)

Есептеу физикасы - шығару үшін сандық теориясы әзірленген физика есептерін сандық алгоритмдерін зерттейтін ғылым.

Әдетте теориялық физиканың бөлімі ретінде қарастырылады, оны теориялық және эксперименттік физика арасындағы аралық тармақ деп санайды.

Оның өзіндік әдістері, өзіндік қиындықтары мен өзінің қолдану аясы бар. Міне, осы сала физикалық процестерді оқып-үйренуде жаңа мүмкіндіктерді ашады.

Сандық әдістер

Идея: қайсыбір алгоритмнің көмегімен есепті шығаруды тізбекті нақтылау

Қолдану аумағы: дәл шешімді табу мүмкін болмағанда немесе оны табу қиынға соққанда

1) қандай да бір шешімді табуға болғанда
2) Көп жағдайда қателікті бағалау мүмкін болады (яғни берілген дәлдікте шешім бар)

1) *Дәл шешімді табуға болмайды* $\sqrt{x+1} - 4\sin(x-1) = 0$

$\cancel{x = 1{,}3974}$ $\boxed{x \approx 1{,}3974}$

2) параметрлер өзгергенде шешімді зерттеудің мүмкін емес
3) Есептеу көлемінің көптігі
4) Кейде қателікті бағалау қиынға соғады
5) әмбебап әдістер жоқ

Негізгі түсініктер

ЕСЕП: теңдеуді шешу

$$x^2 = 5\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5\cos x = 0$$

$$f(x) = 0$$

Шешу түрлері:

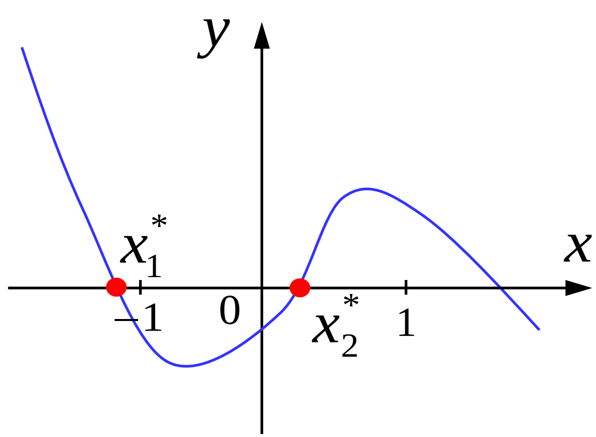
- **аналитикалық** (дәл, формула түрінде)

$$x^* = \ldots$$

Қалай?

- **Жуықтау** (дәл емес шешулер)

Графикалық әдіс



Сандық әдістер

$x_0 = -1$ **Бастапқы жуықтау**

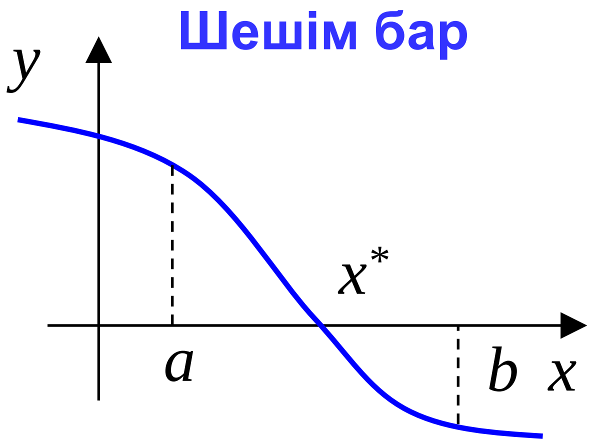
$x_1 = -1{,}102$

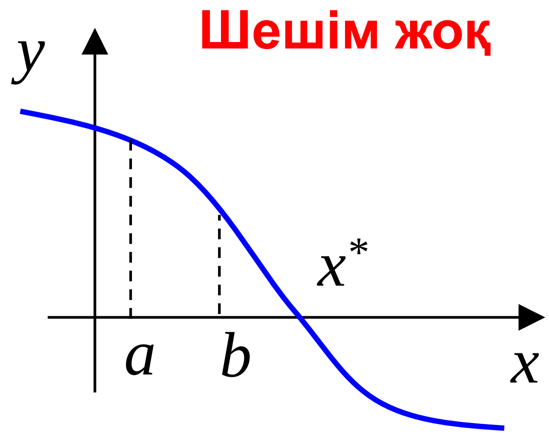
$x_2 = -1{,}215$

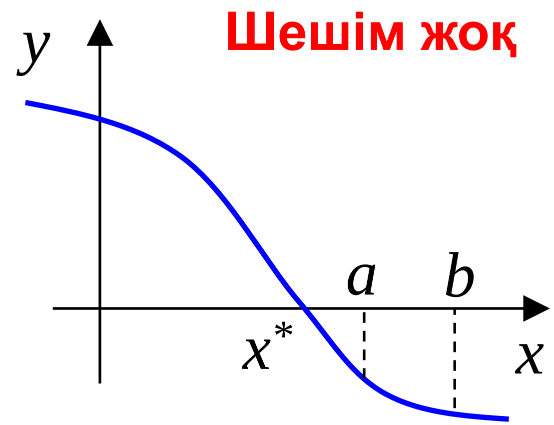
$N \Rightarrow \infty$ болғанда

$$x^* \approx -1{,}252\ldots$$

[*a*, *b*] нын шешімі бар ма?







$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$

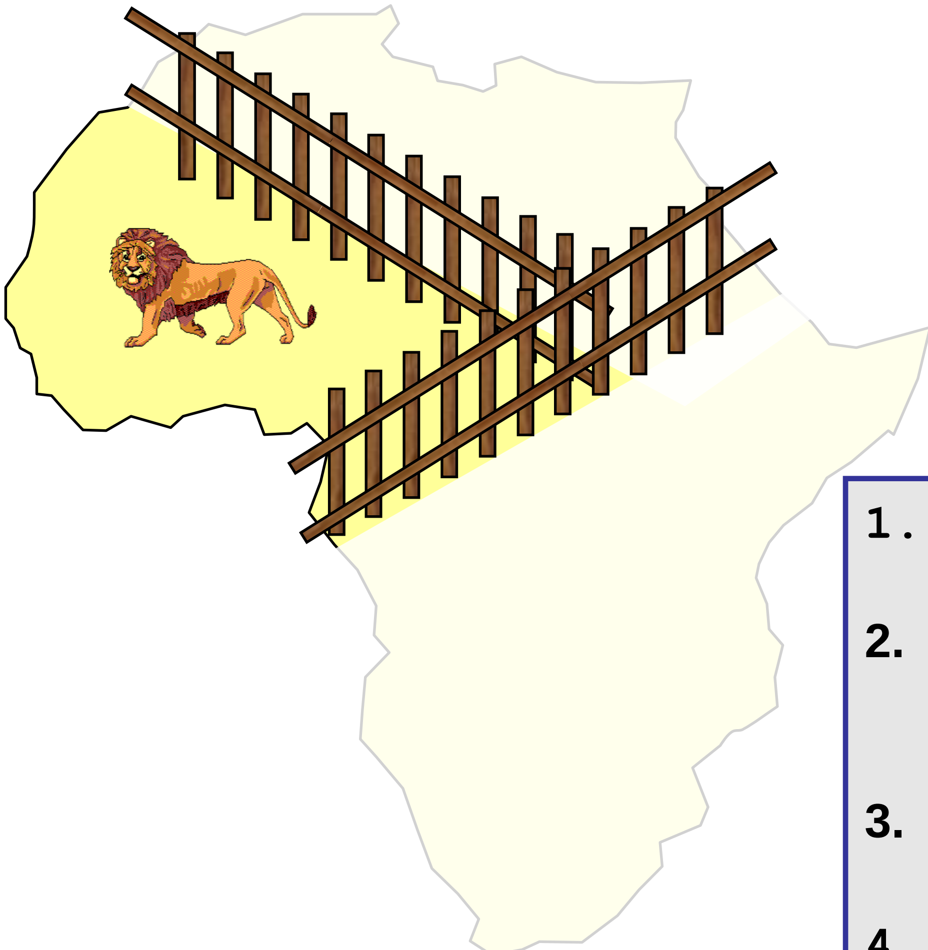
$$f(a) > 0 \qquad f(a) < 0$$
$$f(b) > 0 \qquad f(b) < 0$$

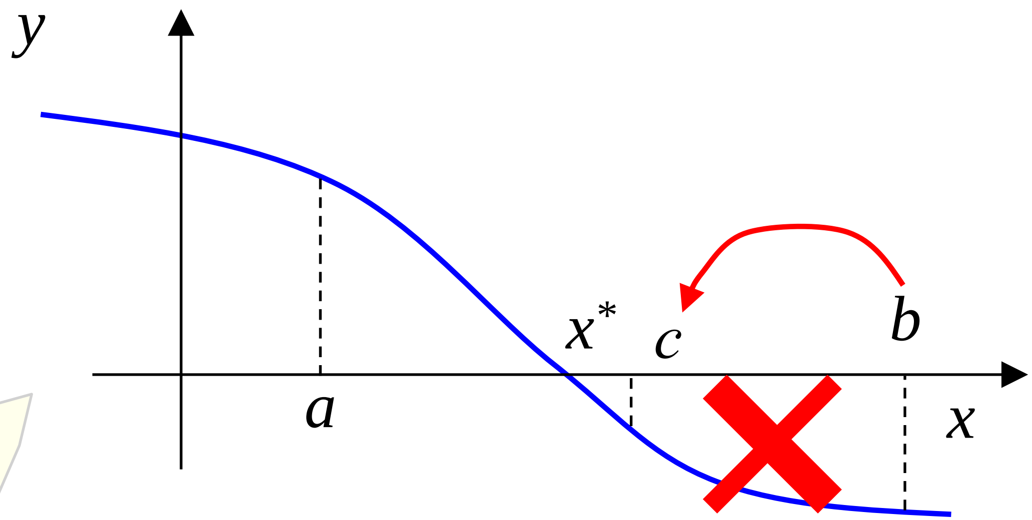
$$f(a)\,f(b) < 0$$

$$f(a)\,f(b) > 0$$

! **Егер *үздіксіз*** $f(x)$**функциясы [*a*, *b*] интервалының соңында әртүрлі таңбаларға ие болса, онда [*a*, *b*] інінде қайсыбір нүктеде** $f(x) = 0$**!**

Дихотомия әдісі (тең бөлу әдісі)





1. [a,b] кесіндісінің ортасын табу:
   c = (a + b) / 2;
2. Егер f(c)*f(a)<0, онда b=c интервалының оң шекарасын жылжыту;
3. Егер f(c)*f(a) ≥ 0, онда a=c интервалының сол шекарасын жылжыту
4. b – a ≤ ε шарты орнықпайынша 1-3 қадамдарын қайталау

Дихотомия әдісі (тең бөлу әдісі)

- Қарапайымдылығы
- **берілген дәлдікте** шешімді алу (машиналық есептеулердің дәл болу шегінде)

- $[a, b]$ **интервалын** білу керек
- $[a, b]$ **интервалында** тек бір ғана шешім болуы керек
- жоғарғы ділдікке жету үшін қадамдардың үлкен саны
- Бір **айнымалысы** бар функция үшін

Кесіндіні тең бөлу әдісі

```
//----------------------------------------------
// BinSolve  шешімді[a,b]инт да табады
//
// Вход:   a, b – интервал шекаралары,  a < b
//         eps  - шешім дәлдігі
// Выход: f(x)=0 x – теңдеуінің шешімі
//----------------------------------------------
float BinSolve ( float a, float b, float eps )
{
  float c;
  while ( b - a > eps )
    {
    c = (a + b) / 2;
    if ( f(a)*f(c) < 0 )
         b = c;
    else a = c;
    }
  return (a + b) / 2;
}
```

```
float f ( float x )
{
  return x*x - 5;
}
```

Қадамдар санын қалай санауға болады?

```
float BinSolve ( float a, float b,
                 float eps, int &n )
{
  float c;
  n = 0;
  while ( b - a > eps )
    {
    c = (a + b) / 2;
    if ( f(
         b
    else a
    n ++;
    }
  return (a
}
```

Айнымалы мәні функция ішінде өзгереді

Негізгі программада шақыру:

```
float x;
int N;
...
x = BinSolve ( 2, 3, 0.0001, N );
printf("Ответ: x = %7.3f", x);
printf("Число шагов: %d", N);
```

Итерация (қайталау) әдісі

Есеп: $f(x) = 0 \qquad x = ?$

Эквивалентті түрлендірулер:

$b \cdot f(x) = 0$ имеет те же решения при $b \neq 0$

$$x + b \cdot f(x) = x$$

$$x = \varphi(x), \qquad \varphi(x) = x + b \cdot f(x)$$

Шығару идеясы:

x_0 – бастапқы жуықта(мысалы, графиктен)

$$x_k = \varphi(x_{k-1}) = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Проблемалар:

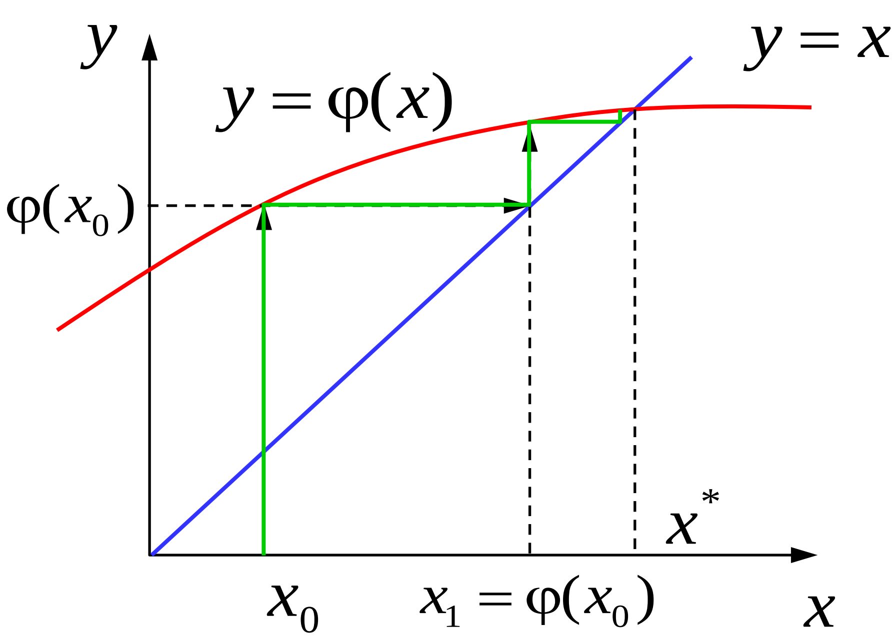
1) b қалай таңдаған дұрыс ?

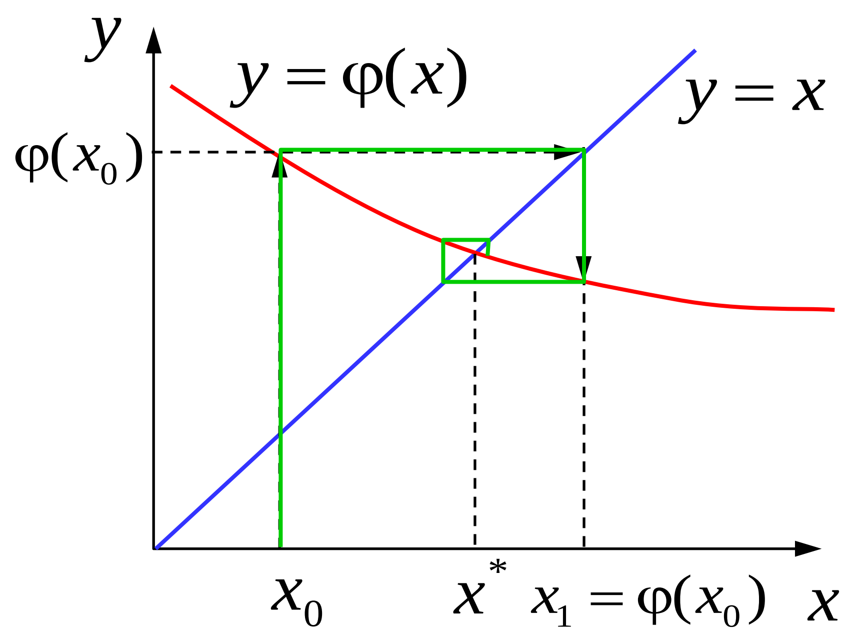
2) Шешімді ылғи осылай табуға бола ма?

Итерацияның сәйкестігі

Сәйкес итерациялық процесс: $x_0, x_1, \ldots$ тізбектілігі (сходится) дәл шешімге жуықтайды

$$x^* = \varphi(x^*) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots \rightarrow x^*$$

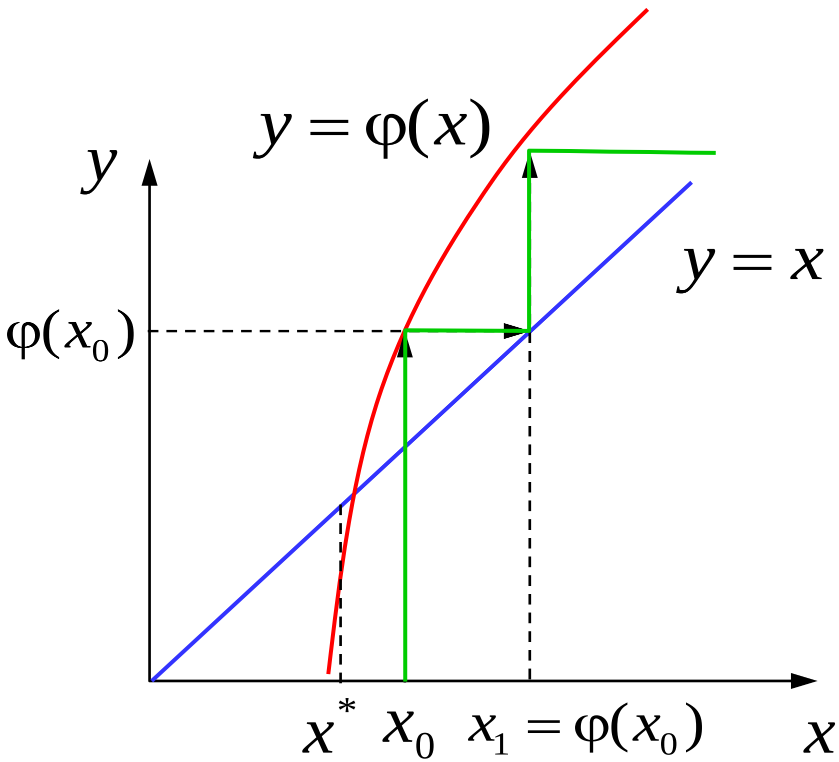




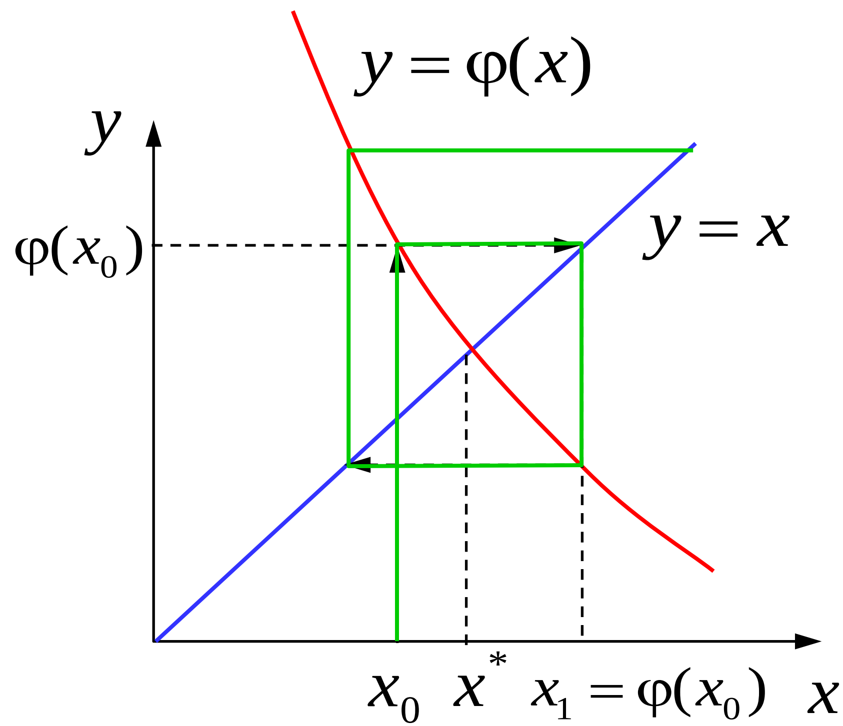
Екі жақты сәйкестік

Итерацияның сәйкессіздігі

Сәйкессіз итерациялық процесс: $x_0, x_1, \ldots$ тізбектілігі шексіз өседі не кемиді, дәл шешімге жуықтамайды



біржақты сәйкессіздік

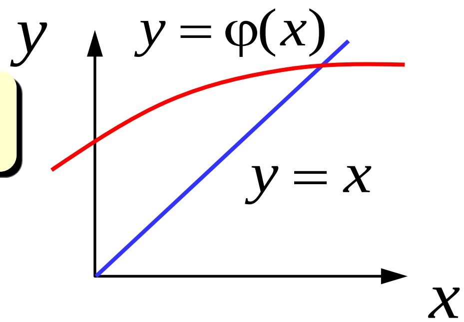


Екі жақты сәйкессіздік

Сәйкестік неге тәуелді?

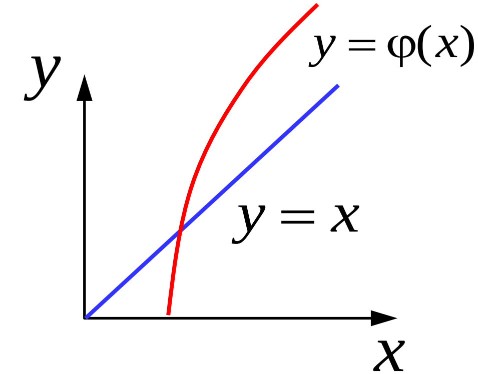
сәйкес

$$0 < \varphi'(x) < 1$$

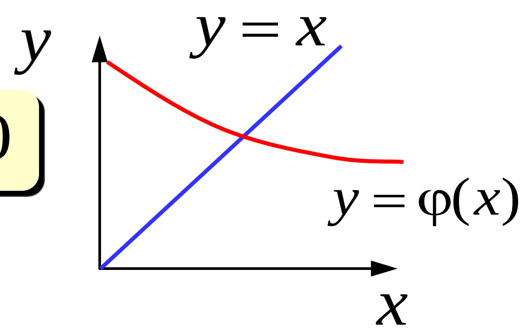


сәйкессіздік

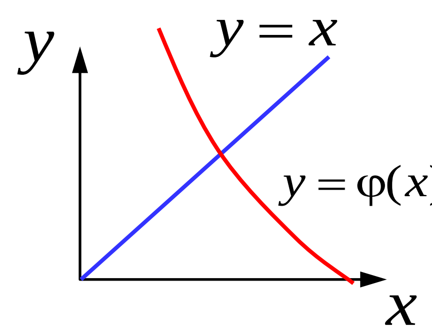
$$\varphi'(x) > 1$$



$$-1 < \varphi'(x) < 0$$



$$\varphi'(x) < -1$$



Қорытынды:

- Итерация сәйкесттігі $\varphi'(x)$ туындысына тәуелді
- итерация $|\varphi'(x)| < 1$ шартында сәйкес және $|\varphi'(x)| > 1$ шартында сәйкес емес
- Сәйкестік b параметрін таңдауға байланысты

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x)$$

b қалай таңдауға болады ?

- Ойша, әртүрлі нұсқамен
- x_0 *бастапқы жуықтауымен*

$$-1 < 1 + b \cdot f'(x_0) < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < b \cdot f'(x_0) < 0$$

$$f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{f'(x_0)} < b < 0$$

$$f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < -\frac{2}{f'(x_0)}$$

- Әр қадамда есепте, мысалы:

$$1 + b \cdot f'(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_k)}$$

Итерация әдісі (программа)

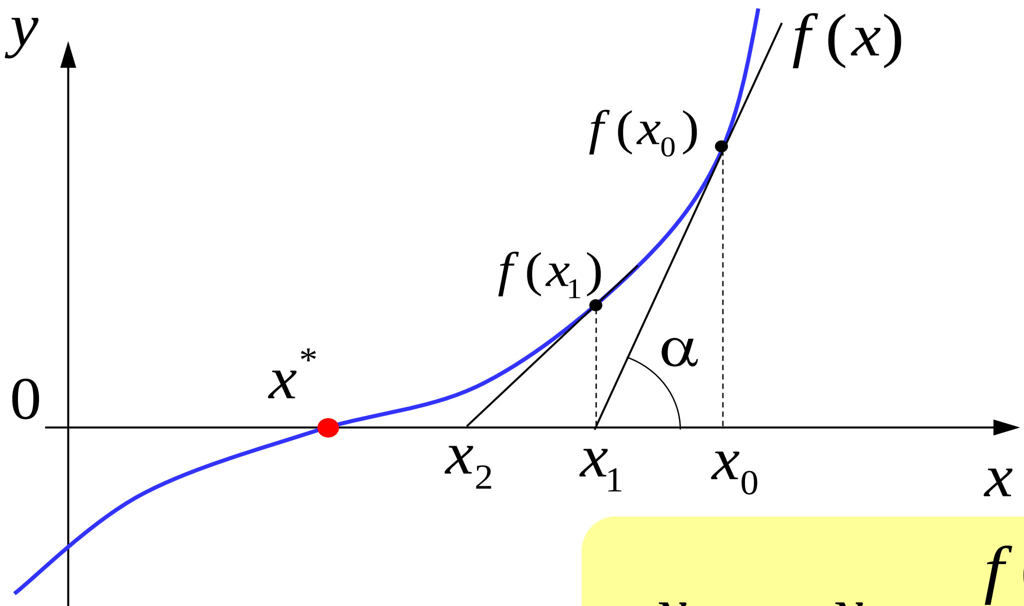
```
//-----------------------------------------------
// Iter решение уравнения методом итераций
// Вход:  x - начальное приближение
//        b - параметр
//        eps  - точность решения
// Выход: решение уравнения f(x)=0
//        n - число шагов
////-----------------------------------------------
float Iter ( float x, float b, float eps, int &n)
{
  int n = 0;
  float dx;
  while ( 1 ) {
     dx = b*f(x);
     x = x + dx;
     if ( fabs(dx) < eps ) break;
     n ++;
     if ( n > 100 ) break;
     }
  return x;
}
```

$$x = x + b \cdot f(x)$$

нормальный выход

аварийный выход

Ньютон әдісі (жанамалар әдісі)



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Итерация әдісімен байланысы қандай?

$$x_k = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}) \quad \Rightarrow \qquad b = -\frac{1}{f'(x_{k-1})}$$

Бақылау сұрақтары:

- Жылуфизикасының қаарстыратын нысандары мен зерттеу әдістері.
- Есептеу физикасындағы зерттеу әдістері.
- Сандық әдістер не үшін керек? Негізгі түсініктері.
- Дихотомия әдісі (тең бөлу әдісі).
- Кесіндіні тең бөлу әдісінің мәнісі не?
- Қадамдар санын қалай санауға болады?
- Итерация (қайталау) әдісі.
- Ньютон әдісі (жанамалар әдісі).

ӘДЕБИЕТ

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - Спб.: Лань, 2009 - 672 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - Спб.: Лань, 2009 - 400с.
3. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2011-364 с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учебное пособие для вузов. М.: Высшая Школа, 2002 - 153 с.
5. Пирумов У.Г. Численные методы. Учебное пособие для вузов. М.: Дрофа, 2013 - 221 с.
6. Костомаров Д. П. Вводные лекции по численным методам. Москва: Логос, 2006 .- 184 с.
7. Волков Е. А. Численные методы. - Санкт-Петербург: Лань, 2009 .-256 с.
8. Исаков В. Н.Элементы численных методов : -Москва: Академия, 2012 .-192 с
9. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. Спб.: Лань, 2008 – 352 с.
10. Болегенова С.А. Численные методы теплофизики: учебное пособие. – Алматы: «Қазақ университеті», 2007. – 100 с.

Интернет-ресурстар:

1. *https://dxdy.ru ›*
2. *window.edu.ru*
3. *https://books.google.kz › book*